

Dobrodružství pravděpodobnosti

Praha / Pobeskydí, 13. 5. 2021

Vysoká škola ekonomická v Praze

Úvod

- Hodíme-li mincí, dopadne na jednu ze svých stran (označme je tradičně panna a orel). Jaká je P , že padne orel?
- Obdobně házíme šestistěnnou kostkou. Je-li tato kostka v pořádku, jaká je P , že padne šestka?
- A co když hodíme napínáčkem? Jaká je pravděpodobnost, že padne špičkou nahoru?
 - Je rovna jedné polovině, či není?
 - A je tato pravděpodobnost vlastností onoho napínáčku, nebo pouze *naším pohledem* na napínáček?

Běžně používaná pojetí pravděpodobnosti

- Klasický (apriorní) přístup založený na poměru počtu elementárních jevů příznivých jevu A a počtu všech elementárních jevů
 - Proč to funguje u mince a kostky a nefunguje u napínáčku?
 - Potřeba stejné možnosti nastání (pravděpodobnosti?) elementárních jevů
- Četnostní (statistický, aposteriorní) přístup založený na relativních četnostech nastání jevu v předchozích pokusech
 - Úlohu napínáčku (částečně) řeší, nicméně další úlohy nevyřešeny:
 - Jaká je P , že Slavia opět postoupí do Ligy mistrů?
 - Jaká je P , že dojde k havárii v JE Temelín?
 - Jaká byla dnes ráno P , že moje přednáška začne včas?
 - „Vy jste s největší pravděpodobností pan Fischer...“

Subjektivní pojetí pravděpodobnosti

- Umožňuje přistoupit k řešení úloh, u nichž nejsou splněny předpoklady pro použití běžně používaných přístupů.
- Vychází nikoli z pravděpodobnosti coby vlastnosti daného jevu (schopnost napínáčku padnout špičkou nahoru), ale z pravděpodobnosti coby našeho stupně důvěry v nastání daného jevu.
- Zatímco u objektivního pojetí se předpokládá, že je pravděpodobnost pro všechny stejná (není závislá na pozorovateli), u subjektivního pojetí se naopak pro jednotlivé pozorovatele liší v závislosti na jejich postojích a informacích.
- Možnost kombinovat apriorní postoj + dodatečnou informaci dohromady.

Příklad napínáček - úvahy

- Na začátku mám svůj postoj k danému jevu, např. $p = 0,3$.
- Po 10 pokusech zjistím, že jev nastal 6x z 10. Změním názor?
- Po 100 pokusech zjistím, že jev nastal 45x ze 100. Změním názor?
- Po 10 000 pokusech zjistím, že jev nastal 3 927x z 10 000. Změním názor?

Příklad bedna – zadání

- V první bedně máme třetinu bílých kuliček a dvě třetiny černých, v druhé bedně máme všechny kuličky bílé.
- Nejprve náhodně vylosujeme bednu a z ní náhodně vylosujeme kuličku.
- Jaká je pravděpodobnost, že vylosovaná kulička bude bílá?

Příklad bedna – řešení

K řešení této úlohy využijeme klasického vymezení pravděpodobnosti; nikomu nemůže být bráněno v tom, aby formuloval svůj postoj, nicméně ten by byl nejspíš beztak založen na níže uvedeném výpočtu.

Označme náhodné jevy

A... vytažení bílé kuličky

B_1 ...výběr první bedny

B_2 ...výběr druhé bedny

Pravděpodobnost výběru každé z beden je rovna 0,5, pro výpočet pravděpodobnosti nastání jevu A pak použijeme vzorec pro výpočet úplné pravděpodobnosti:

Pravděpodobnost vytažení bílé kuličky je tedy

$$P(A) = P(B_1) \times P(A | B_1) + P(B_2) \times P(A | B_2) = 1/2 \times 1/3 + 1/2 \times 1 = 1/6 + 1/2 = 2/3.$$

Příklad bedna 2 – zadání

Vrátíme vytaženou kuličku do bedny a z téže bedny opět náhodně vybereme kuličku.

Jaká je pravděpodobnost, že vytažená kulička bude bílá?

Příklad bedna 3 – zadání

Vrátíme vytaženou kuličku do bedny a z téže bedny opět náhodně jednu kuličku vybereme.

Než jsme však kuličku do bedny vrátili, podívali jsme se na ni a zjistili, že je bílá (alternativně – polovině žáků jsme řekli, že je bílá).

Jaká je pravděpodobnost, že vytažená kulička bude bílá?

Příklad bedna 3 – řešení (a lámání chleba)

Objektivní pojetí: řešení tedy bude stejné a pravděpodobnost vytažení bílé kuličky bude rovna $P(A) = 2/3$ – tím, že jsme se na kuličku podívali, jsme nemohli změnit objektivní vlastnosti kuličky (schopnost být ve výběru).

V rámci subjektivního pojetí je řešení odlišné. Zjištění barvy vytažené kuličky je totiž dodatečnou informací, která ovlivní náš postoj k jevu „v předchozím pokusu jsme vytáhli první bednu“.

S využitím známého Bayesova vzorce můžeme odpovědět na otázku „Jaká je pravděpodobnost, že jsme vytáhli první bednu, jestliže z ní vytažená kulička byla bílá?“ - dojdeme k výsledku $1/4$.

Nyní můžeme (s upravenými pravděpodobnostmi výběru beden) přepočítat úplnou pravděpodobnost:

$$P(A) = P(B_1) \times P(A | B_1) + P(B_2) \times P(A | B_2) = 1/4 \times 1/3 + 3/4 \times 1 = 5/6$$

K zamyšlení pro objektivisty: co když se podívám a zjistím, že je černá...

Příklad letadlo – zadání

Spadlo letadlo. Z dlouhodobých pozorování (získaných například pomocí četnostního vymezení pravděpodobnosti) odhadujeme, že

s pravděpodobností 0,5 spadlo v horách,

s pravděpodobností 0,3 spadlo do moře a

s pravděpodobností 0,2 spadlo v nížině.

Dále víme, že pravděpodobnost, že se letadlo najde, je

při pádu do hor 0,4,

při pádu do moře 0,1 a p

při pádu do nížiny 0,8.

Jaká je pravděpodobnost, že se letadlo najde? (Pod pojmem nalezení letadla uvažujeme v celém příkladu nalezení letadla do 1 roku od pádu.)

Příklad letadlo – řešení

Řešení je analogické jako v předchozím příkladě. Označíme

$P(H)$... pravděpodobnost, že letadlo spadlo v horách,

$P(M)$... pravděpodobnost, že letadlo spadlo do moře,

$P(N)$... pravděpodobnost, že letadlo spadlo do nížiny a

$P(U)$... pravděpodobnost, že se letadlo najde.

Vypočteme úplnou pravděpodobnost

$$P(U) = P(H) \times P(U | H) + P(M) \times P(U | M) + P(N) \times P(U | N) = \\ = 0,5 \times 0,4 + 0,3 \times 0,1 + 0,2 \times 0,8 = 0,2 + 0,03 + 0,16 = 0,39.$$

Příklad letadlo 2 – zadání

Letadlo se nenašlo. Jaká je pravděpodobnost, že leží v moři?

Příklad letadlo 2 – řešení

- Objektivisté budou tvrdit, že letadlo leží v moři s pravděpodobností 0,3 (letadlo již je spadlé a dodatečnou informací se s jeho polohou nemohlo nic stát).
- Subjektivisté zakomponují dodatečnou informaci a propočtou nové pravděpodobnosti dle Bayesova vzorce a zvýší pravděpodobnost na 0,44.
- Je v tuto chvíli na nás, zdali ponecháme pravděpodobnost, že letadlo spadlo do moře $P(M)$ na výchozí úrovni 0,3, která se opírá o náš apriorní úsudek zahrnující případně i informaci o předchozích místech dopadu spadlých letadel, nebo zdali ji změníme na úroveň 0,44, zahrnující navíc dodatečnou informaci o tom, že jsme letadlo dosud nenašli.
- Zatímco objektivisté by ponechali pravděpodobnost 0,3, subjektivisté by volili buď hodnotu 0,44, a nebo lineární kombinaci hodnot 0,3 a 0,44. Stanovení vah apriorní pravděpodobnosti a dodatečné informace je pak samozřejmě také subjektivní.

Diskuse

- Pravidla pro počítání s pravděpodobnostmi se mezi jednotlivými přístupy neliší, liší se pouze interpretace výsledků a pohled na pravděpodobnost.
- Díky subjektivnímu pojetí lze pojmut větší šíři úloh, používaných např. v manažerském rozhodování
 - Slavia, Temelín, řízení zásob, zajištění mojí přednášky.
- Pokusy objektivizovat subjektivní pravděpodobnost – např. de Finettiho hra.
- Běžně používané výukové texty (i na VŠ úrovni) jsou založeny téměř výlučně na objektivistickém pojetí, srov. např. oblast konstrukce intervalů spolehlivosti či testování hypotéz, kde jsou díky tomu některé formulace poněkud krkolomné a i pro studenty vysokých škol někdy stěží pochopitelné.

Dotazy, náměty, komentáře,
připomínky, povzdechy...?